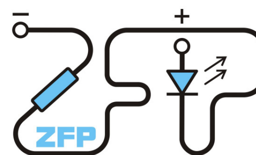
Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...



Úloha č. ....

Název úlohy: ....

Jméno: .... Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření: .... Datum odevzdání: ....

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.................................. dne: ....

Pracovní úkoly

1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, změřte závislost objemového průtoku Q na úbytku statického tlaku p na vyšetřované délce trubice l ve směru proudění.

2. Sestrojte graf závislosti $Q = Q(p)$.

3. Ze směrnice závislosti $Q = Q(p)$ v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.

4. Upravený poloměr dosaďte do vztahů pro výpočet Re a k.

5. Sestrojte graf závislosti $k = k(Re)$, kde k je součinitel odporu trubice a Re je Reynoldsovo číslo. Do grafu vyneste teoretickou závislost pro laminární i turbulentní proudění.

6. Vysvětlete, proč u některých trubic kolísala během měření výška vodního sloupce v manometru. Odhadněte maximální změnu $(\Delta h/h)$ během jednoho měření v procentech.

7. V oblasti laminárního proudění změřte dostatečný počet experimentálních bodů.

8. Závislost $Q = Q(p)$ (resp. $k = k(Re)$) vyneste pro všechny měřené trubice do jednoho grafu a v případě potřeby doplňte dalším grafem s výřezem.

[1]

Teorie

Cílem práce je zkoumání laminárního a turbulentního proudění ve třech různých skleněných trubicích o různých vnitřních poloměrech r. Trubice jsou napojeny na zdroj vody opatřený ventilem, kterým je možné ovlivňovat tlak vcházející vody. Ve vzdálenosti l od ústí trubice se nachází manometr určený k měření hydrostatického tlaku v tomto místě. Obrázek aparátu lze nalézt v [2, obr. 1].

Pro tlak v místě manometru platí tento vztah:

$$p = h\rho g, \tag{1}$$

kde h je výška vodního sloupce v manometru, ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení [2]. Tlak p potom závisí na rychlosti proudění $Q = V/t$. Pro laminární proudění je jeho závislost určena tímto vzorcem:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} p. \text{ [2]} \tag{2}$$

Protože je poloměr trubice ve vzorci ve čtvrté mocnině, je nepřesnost výpočtu výrazně ovlivněna nepřesností r, které přímou metodou nejsme schopni změřit s požadovanou chybou. Proto provedeme lineární regresi vztahu $Q = ap$, kde se směrnice bude blížit $a = \frac{\pi r^4}{8\eta l}$. Pomocí aritmetické úpravy a použitím Gaussova zákona získáme pro r tento vztah:

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\eta la}{\pi}};\;\; u(r) = \frac{r}{4}\sqrt{\left(\frac{\eta}{u(\eta)}\right)^2 + \left(\frac{l}{u(l)}\right)^2 + \left(\frac{a}{u(a)}\right)^2}, \tag{3}$$

kde η je dynamická viskozita vody. Připomeňme ještě znovu, že tento vzorec platí pouze pro laminární proudění.

Charakter proudění popisuje tzv. Reynoldsovo číslo definované jako

$$Re = \frac{r\rho v}{\eta}, \tag{4}$$

kde v je rychlost proudění [2]. Jelikož jde o trubice kruhového průřezu, platí, že

$$Q = \pi r^2 v. \tag{5}$$

Po dosazení (5) do (4) a aplikování Gaussova zákona dostáváme:

$$Re = \frac{\rho Q}{\pi\eta r};\;\; u(Re) = Re\sqrt{\left(\frac{\rho}{u(\rho)}\right)^2 + \left(\frac{Q}{u(Q)}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{u(\eta)}\right)^2 + \left(\frac{r}{u(r)}\right)^2} \tag{6}$$

Do hodnoty cca. $Re \leq 1000$ je proudění v trubici ryze laminární, při hodnotách mezi $1000 < Re < 2000$ se jedná o přechodné proudění, při kterém tlak v trubici prudce kolísá. Pro hodnoty nad $Re \geq 2000$ je potom proudění trvale turbulentní. [2]

Pro tlak dále platí vztah

$$p = \frac{kl\rho v^2}{2r}, \tag{7}$$

kde v je střední rychlost v průřezu proudové trubice a k je tzv. součinitel odporu [2]. V experimentu nás bude zajímat vztah tohoto součinitele a Reynoldsova čísla. Ze vztahů (5)a (7) a Gaussova zákona dostáváme

$$k = \frac{2\pi^2 pr^5}{l\rho Q^2};\;\; u(k) = k\sqrt{\left(\frac{p}{u(p)}\right)^2 + 5\left(\frac{r}{u(r)}\right)^2 + \left(\frac{l}{u(l)}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{u(\rho)}\right)^2 + 2\left(\frac{Q}{u(Q)}\right)^2} \tag{8}$$

Teoretická závislost k a Re je pro laminární proudění

$$k = \frac{16}{Re} \tag{9}$$

a pro turbulentní proudění

$$k \approx \frac{0,133}{\sqrt[4]{Re}}.\;\; [2] \tag{10}$$

Výsledky měření

Pomůcky

- Trubice s manometry
- Pásové měřidlo
- Posuvné měřidlo
- Zdroj vody s regulovatelným tlakem
- Odměrný válec
- Stopky
- Teploměr

Podmínky měření

teplota	$23,7$ °C
tlak	$9998,1$ hPa
vlhkost vzduchu	$20,1$ %
místo měření	Praha

Zavedené veličiny

r	poloměr trubice
l	délka trubice od manometru po otevřený konec
h	výška vody v manometrickém sloupci
Δh	maximální zvýšení/snížení hladiny v manometru vlivem kolísání tlaku v trubici
t	čas
Δt	reakční doba člověka
g	tíhové zrychlení
ρ	hustota vody
η	dynamická viskozita
T	teplota
Re	Reynoldsovo číslo
k	součinitel odporu
a	směrnice lineární regrese
$u(X)$	střední směrodatná odchylka veličiny X

Hodnoty z externích zdrojů

Z externích zdrojů jsem získal hodnoty veličin:

$$g = 9,83 \pm 0,01 \text{ m/s}^2 \quad [3] \tag{11}$$

$$\Delta t = 0,627 \pm 0,0695 \text{ s} \quad [4] \tag{12}$$

Údaj (12) byl naměřen pro reakční dobu v simulovaném prostředí jízdy automobilem, čas byl měřen od pozorování události na vozovce po fyzickou akci, kterou řidič provedl. Přestože se jedná o jiné prostředí, usoudil jsem, že reakční doba bude podobná – v obou prostředích je potřeba vykonat podobně rozsáhlou fyzickou akci. Při vyhodnocení výsledků jsem tedy jako směrodatnou odchylku naměřeného času používal

$$u(t) \approx 0,6 \text{ s}, \tag{13}$$

nepřesnost stopek je v porovnání s touto hodnotou zanedbatelná.

Dále jsem zjistil hustotu [5] a dynamickou viskozitu [6] destilované vody při naměřené teplotě (měření teploty viz. kapitola Naměřené hodnoty). Směrodatnou odchylku těchto veličin jsem vypočítal tak, že jsem zjistil přesné hodnoty těchto veličin pro mezní hodnoty teploty a z tohoto intervalu zvolil podinterval odpovídající jistotě 1σ.

Naměřené hodnoty

Nejprve jsem měřil pásovým měřidlem vzdálenost od ústí trubice po bližší kraj manometru l_{min} a po vzdálenější kraj manometru l_{max}, a posuvným měřidlem průměr trubice $2r$ ve třech různých směrech. Z těchto hodnot jsem vypočítal l a r s jejich směrodatnými odchylkami a výsledek zapsal do tabulky /1/.

Poté jsem pro jednotlivé trubice změřil orientační hodnoty h, při kterých se mění typ proudění, abych byl schopný experiment dobře rozvrhnout a ke všem typům proudění získat dostatek dat. Typ proudění lze rozpoznat takto (popisováno od nejnižšího průtoku):

- laminární proudění začíná v okamžiku, kdy se trubice dostatečně zavodní, aby se hladina v manometru ustálila a z ústí vytékal stálý proud
- laminární proudění se mění v přechodné v okamžiku, kdy hladina v manometru začne prudce kolísat
- přechodné proudění se mění v turbulentní v okamžiku, kdy se hladina v manometru opět ustálí
- turbulentní proudění trvá až po největší průtok, který náš zdroj vody umožňuje.

Naměřené hodnoty jsem zapsal do tabulky /2/, v některých případech jsem se dostal mimo stupnici manometru dříve, než jsem naměřil všechny hodnoty. Zatímco jsem měřil typ proudění, měl jsem ve vytékající vodě ponořený teploměr. Tím jsem změřil teplotu vody potřebnou pro tabulku /3/.

Následně jsem měřil průtok jednotlivými trubicemi při stálém vstupním tlaku (tj. v průběhu jednoho měření nebylo manipulováno s kohoutkem). Měření jsem prováděl tak, že jsem nejprve otočil kohoutkem tak, aby se hladina v manometru dostala přibližně do té výšky, pro kterou chci měření provádět. Poté jsem pod ústí trubice umístil odměrný válec a spustil stopky (buďto hned, nebo poté, co hladina dosáhla nějaké nízké hodnoty V_1). Po určité době jsem odměrný válec vyjmul zpod trubice a stopky zastavil. Změřil jsem objem ve válci a zapsal ho jako V_2 (v pozdějších

měřeních, kde $V_1 = 0$ jsem ho zapisoval už jen jako V). Z těchto údajů jsem podle (1) a (2) vypočítal p a Q. Výsledky jsem potom pro trubici A zapsal do tabulky /4/, pro trubici B do /5/ a pro C do /6/.

Závislost $Q(p)$ jsem potom pro všechny trubice zanesl do grafu č. 1. Na data pro laminární proudění jsem navíc pomocí programu `gnuplot` provedl pro každou trubici zvlášť fit ryze lineární funkce (tj. lin. fce. procházející počátkem). Tuto funkci jsem také zanesl do grafu. Z její směrnice a jsem potom v tabulce /7/ vypočítal podle (3) zpřesnění r.

Hodnoty průměru jednotlivých trubic podle vzorce (3) jsou pro trubice A, B, resp. C:

$$r_A = (0,992 \pm 0,007)\ \text{mm}$$
$$r_B = (1,403 \pm 0,009)\ \text{mm}$$
$$r_C = (1,640 \pm 0,013)\ \text{mm}$$

Nakonec jsem podle (6) a (8) vypočítal hodnoty Re a k pro jednotlivá měření, výsledky zapsal do tabulky /8/ a závislost $k(Re)$ zanesl do grafu č. 2, kam jsem také přidal predikci laminární (9) a turbulentní (10) závislosti.

/1/ Měření poloměru a délky trubice						střední hodnoty, std. odchylky	
trubice	2r ± 0,05 [mm]			l [cm]; min, max		r ± 0,08 [mm]	l [mm]
A	2,4	2,5	2,5	24,6	25,1	1,23	249 ± 3
B	3	3	3,1	24,8	25,3	1,52	251 ± 3
C	3,6	3,5	3,5	19,8	20,5	1,77	202 ± 4

/2/ Orientační měření závislosti typu proudění na h [cm]				
trubice	lineární		přechodné	turbulentní
A	4	26	—	—
B	3	9	27	—
C	1	4	11	20

/3/ Naměřená teplota a z ní vyplývající vlastnosti vody										
T ± 0,5 [°C]	ρ [kg/m³]	ρ_{min}	ρ_{max}	mezní ch. ρ	std. odch. ρ	η [mPa s]	η_{min}	η_{max}	mezní ch. η	std. odch. η
22	997,77	997,66	997,88	0,23	0,13	0,953	0,942	0,965	0,023	0,013

/4/ Trubice A – měření závislosti výšky vodního sloupce na průtoku										
h ± 0,5 [mm]	Δh [mm]	V_1 ± 1 [ml]	V_2 ± 1 [ml]	t ± 0,6 [s]	Q [ml/s]	mezní ch. Q	std. odch. Q	p [Pa]	mezní ch. p	std. odch. p
41	0	5	25	37,63	0,53	± 0,04	± 0,02	402	± 5	± 3
71	0	5	25	18,85	1,06	± 0,08	± 0,05	696	± 5	± 3
98	0	0	40	25,94	1,54	± 0,07	± 0,04	961	± 5	± 3
137	0	0	41	19,32	2,12	± 0,10	± 0,06	1344	± 5	± 3
—	—	± 2 [ml]	± 2 [ml]	—	—	—	—	—	—	—
160	1	0	154	60,06	2,56	± 0,05	± 0,03	1569	± 15	± 9
190	0	0	178	59,06	3,01	± 0,06	± 0,03	1864	± 5	± 3
224	0	0	210	59,68	3,52	± 0,06	± 0,03	2197	± 5	± 3
252	1	0	176	44,59	3,95	± 0,08	± 0,05	2472	± 15	± 9

/5/ Trubice B – měření závislosti výšky vodního sloupce na průtoku									
h ± 0,5 [mm]	Δh [mm]	V ± 2 [ml]	t ± 0,6 [s]	Q [ml/s]	mezní ch. Q	std. odch. Q	p [Pa]	mezní ch. p	std. odch. p
31	0	108	60,13	1,80	± 0,02	± 0,01	304	± 5	± 3
43	0	150	53,85	2,79	± 0,02	± 0,01	422	± 5	± 3
53	0	202	59,78	3,379	± 0,01	± 0,01	520	± 5	± 3
61	0	182	47,78	3,81	± 0,02	± 0,01	598	± 5	± 3
72	1	206	46,13	4,466	± 0,020	± 0,009	706	± 15	± 9
88	1	212	40,75	5,20	± 0,02	± 0,01	863	± 15	± 9
102	5	226	39,87	5,67	± 0,02	± 0,01	1000	± 54	± 31
135	15	186	31,70	5,87	± 0,02	± 0,01	1324	± 152	± 88
157	15	202	31,25	6,46	± 0,02	± 0,01	1540	± 152	± 88
180	1	202	30,13	6,70	± 0,02	± 0,01	1765	± 15	± 9
207	1	212	30,00	7,07	± 0,02	± 0,01	2030	± 15	± 9
263	0,2	228	29,47	7,74	± 0,02	± 0,01	2580	± 7	± 4

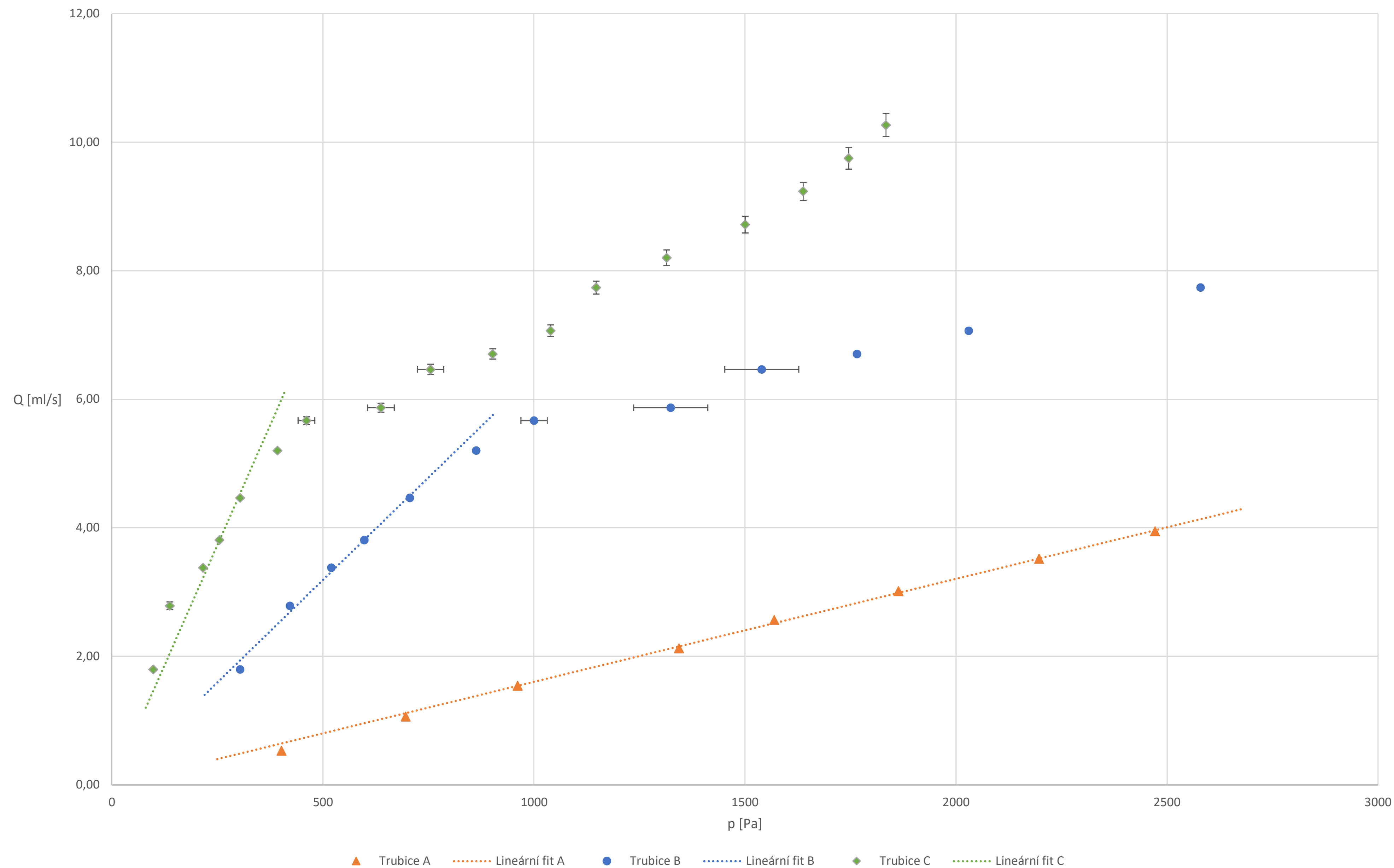
/6/ Trubice C – měření závislosti výšky vodního sloupce na průtoku									
h ± 0,5 [mm]	Δh [mm]	V ± 1 [ml]	t ± 0,6 [s]	Q [ml/s]	mezní ch. Q	std. odch. Q	p [Pa]	mezní ch. p	std. odch. p
10	0	37	65,75	1,80	± 0,05	± 0,03	98	± 5	± 3
14	0	43	20,18	2,79	± 0,11	± 0,06	137	± 5	± 3
—	—	± 2 [ml]	—	—	—	—	—	—	—
22	0	202	60,25	3,38	± 0,05	± 0,03	216	± 5	± 3
26	0	233	59,44	3,81	± 0,05	± 0,03	255	± 5	± 3
31	0	245	52,94	4,47	± 0,06	± 0,04	304	± 5	± 3
40	0	216	41,09	5,20	± 0,09	± 0,05	392	± 5	± 3
47	3	222	36,28	5,67	± 0,11	± 0,06	461	± 34	± 20
65	5	211	32,16	5,87	± 0,12	± 0,07	638	± 54	± 31
77	5	200	29,72	6,46	± 0,15	± 0,08	755	± 54	± 31
92	2	222	30,87	6,70	± 0,14	± 0,08	902	± 25	± 14
106	1	226	29,68	7,07	± 0,16	± 0,09	1040	± 15	± 9
117	0	230	28,25	7,74	± 0,18	± 0,10	1148	± 5	± 3
134	0	226	25,75	8,20	± 0,20	± 0,12	1314	± 5	± 3
153	0	228	24,25	8,72	± 0,23	± 0,13	1501	± 5	± 3
167	0	237	24,25	9,23	± 0,24	± 0,14	1638	± 5	± 3
178	0	212	20,50	9,75	± 0,30	± 0,17	1746	± 5	± 3
187	0	214	20,35	10,27	± 0,32	± 0,18	1834	± 5	± 3

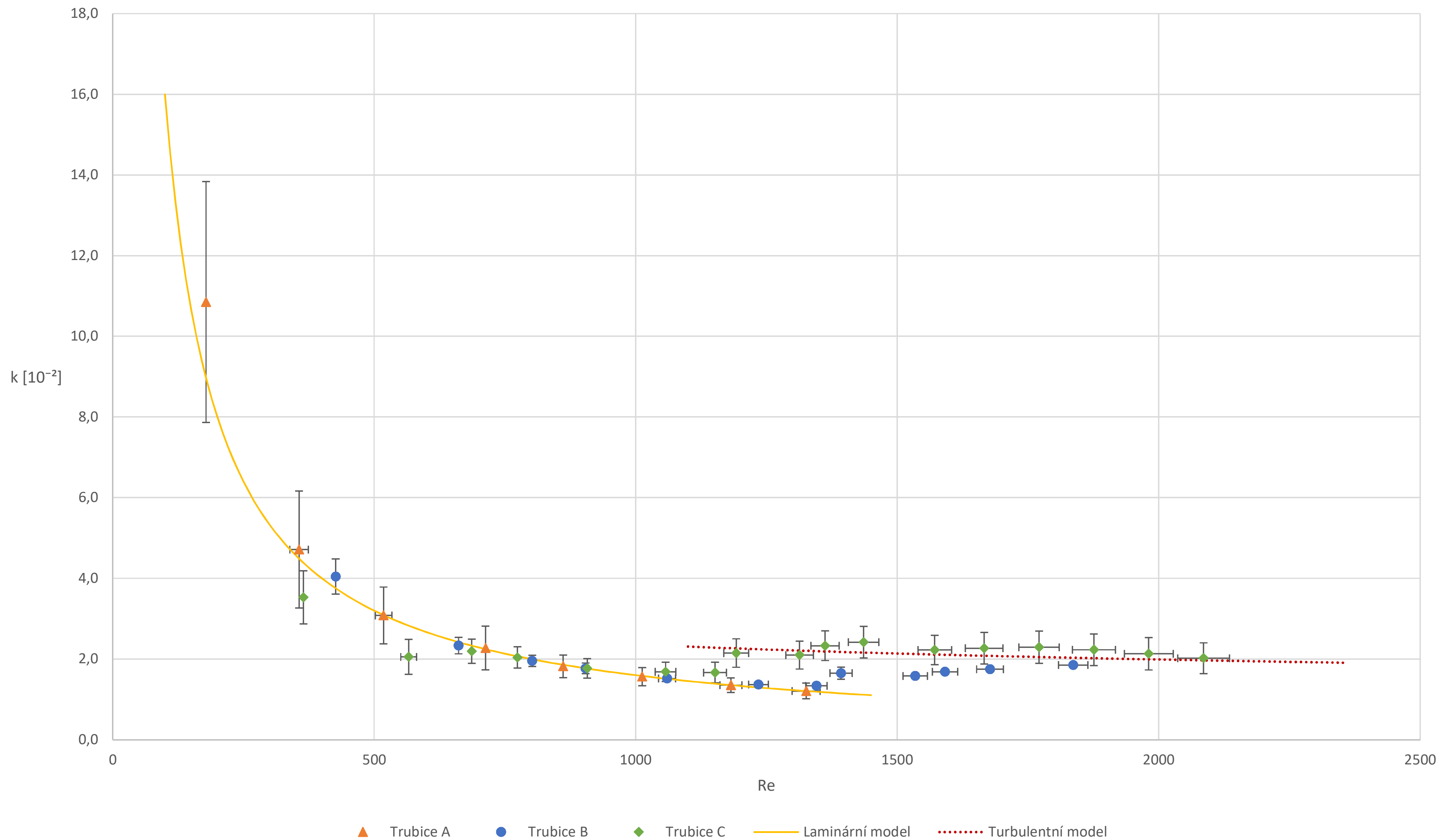
/7/ Směrnice závislosti Q = a·p, zpřesněný poloměr trubice

trubice	a [10^{-9} m^4 s kg^{-1}]	rel. ch. fitu	rel. ch. Q	rel. ch. p	celk. chyba a	r [mm]	
A	1,60	1,14%	2,27%	0,35%	± 0,04	0,992	± 0,007
B	6,37	1,46%	0,23%	1,78%	± 0,12	1,403	± 0,009
C	14,74	4,54%	1,33%	1,53%	± 0,30	1,640	± 0,013

/8/ Závislost Reynoldsova čísla a součinitele odporu

Q [ml/s]		p [Pa]		Re		k [10^{-2}]	
Trubice A							
0,53	± 0,02	402	± 3	179	± 7	10,8	± 3,0
1,06	± 0,05	696	± 3	356	± 18	4,7	± 1,5
1,54	± 0,04	961	± 3	518	± 16	3,1	± 0,7
2,12	± 0,06	1344	± 3	713	± 23	2,3	± 0,5
2,56	± 0,03	1569	± 9	861	± 17	1,8	± 0,3
3,01	± 0,03	1864	± 3	1012	± 19	1,6	± 0,2
3,52	± 0,03	2197	± 3	1182	± 21	1,4	± 0,2
3,95	± 0,05	2472	± 9	1326	± 27	1,2	± 0,2
Trubice B							
1,80	± 0,01	304	± 3	426	± 7	4,0	± 0,4
2,79	± 0,01	422	± 3	661	± 10	2,3	± 0,2
3,379	± 0,01	520	± 3	802	± 12	2,0	± 0,1
3,81	± 0,01	598	± 3	904	± 14	1,8	± 0,1
4,466	± 0,009	706	± 9	1060	± 16	1,5	± 0,1
5,20	± 0,01	863	± 9	1235	± 19	1,4	± 0,1
5,67	± 0,01	1000	± 31	1346	± 21	1,3	± 0,1
5,87	± 0,01	1324	± 88	1393	± 21	1,7	± 0,1
6,46	± 0,01	1540	± 88	1534	± 23	1,6	± 0,1
6,70	± 0,01	1765	± 9	1591	± 24	1,7	± 0,1
7,07	± 0,01	2030	± 9	1677	± 26	1,7	± 0,1
7,74	± 0,01	2580	± 4	1836	± 28	1,8	± 0,1
Trubice C							
1,80	± 0,03	98	± 3	365	± 8	3,5	± 0,7
2,79	± 0,06	137	± 3	566	± 15	2,1	± 0,4
3,38	± 0,03	216	± 3	687	± 12	2,2	± 0,3
3,81	± 0,03	255	± 3	774	± 14	2,0	± 0,3
4,47	± 0,04	304	± 3	907	± 17	1,8	± 0,2
5,20	± 0,05	392	± 3	1057	± 20	1,7	± 0,2
5,67	± 0,06	461	± 20	1152	± 22	1,7	± 0,3
5,87	± 0,07	638	± 31	1192	± 24	2,1	± 0,4
6,46	± 0,08	755	± 31	1313	± 26	2,1	± 0,3
6,70	± 0,08	902	± 14	1362	± 27	2,3	± 0,4
7,07	± 0,09	1040	± 9	1436	± 29	2,4	± 0,4
7,74	± 0,10	1148	± 3	1572	± 32	2,2	± 0,4
8,20	± 0,12	1314	± 3	1666	± 36	2,3	± 0,4
8,72	± 0,13	1501	± 3	1771	± 39	2,3	± 0,4
9,23	± 0,14	1638	± 3	1876	± 41	2,2	± 0,4
9,75	± 0,17	1746	± 3	1981	± 47	2,1	± 0,4
10,27	± 0,18	1834	± 3	2086	± 49	2,0	± 0,4


Graf č. 1 – Závislost průtoku na tlaku v trubici
Q [ml/s]
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
p [Pa]
Trubice A
Lineární fit A
Trubice B
Lineární fit B
Trubice C
Lineární fit C


Graf č. 2 – Závislost Reynoldsova čísla a koef. odporu
18,0
16,0
14,0
12,0
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
0,0
k [10⁻²]
0
500
1000
1500
2000
2500
Re
Trubice A
Trubice B
Trubice C
Laminární model
Turbulentní model

Závěr

Naměřené průměry trubek

$$r_A = (1,23 \pm 0,08)\ \mathrm{mm}$$

$$r_B = (1,52 \pm 0,08)\ \mathrm{mm}$$

$$r_C = (1,77 \pm 0,08)\ \mathrm{mm}$$

nejsou ve shodě s vypočítaným zpřesněním

$$r_A = (0,992 \pm 0,007)\ \mathrm{mm}$$

$$r_B = (1,403 \pm 0,009)\ \mathrm{mm}$$

$$r_C = (1,640 \pm 0,013)\ \mathrm{mm}$$

To může být způsobeno jednak tím, že tlak v oblasti manometru je ve skutečnosti složitější než v našem jednoduchém modelu [2], ale také tím, že použité posuvné měřidlo bylo z plastu, který podléhá drobným deformacím, takže je poměrně složité naměřit výsledek s tak vysokou přesností.

Model závislosti $k(Re)$ se ukázal jako poměrně přesný. Pro $Re < 1100$ bylo ve shodě s laminárním modelem 15 ze 17 naměřených bodů. Laminární model je tedy v souladu s měřením. Pro $Re > 1400$ bylo ve shodě s turbulentním modelem všech 7 bodů naměřených pro trubici C. Body naměřené pro trubici B ve shodě s turbulentním modelem nebyly, ale limitně se mu blížily. Bohužel pro $Re > 2000$ (což je udávaný počátek platnosti turbulentního modelu [2]) bylo příliš málo dat, nelze tedy jeho platnost jednoznačně ověřit.

Literatura

[1] VALENTOVÁ, Helena et al. (III) Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu. *Základní fyzikální praktikum: ... vše o fyzikálním praktiku najdete právě na těchto stránkách* [online]. Praha, 3. 5. 2017 [cit. 2018-03-16]. Dostupné z: `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/103`

[2] *III. Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu* [online]. [cit. 2018-03-16]. Dostupné z: `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_103.pdf`

[3] *Gravity of Earth in Prague.* WolframAlpha [online]. [cit. 2018-03-16]. Dostupné z: `http://www.wolframalpha.com/input/?i=gravity+of+earth+in+prague`

[4] NAGLER, Charles Arthur a William Merle NAGLER. Reaction time measurements. *Forensic Science* [online]. 1973, 2, 261-274 [cit. 2018-03-16]. DOI: 10.1016/0300-9432(73)90041-1. ISSN 03009432. Dostupné z: `http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0300943273900411`

[5] DUNCAN, Jeremiah. Density of Water (g/mL) vs. Temperature (deg C). *Dr. Jeremiah Duncan's Homepage* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: `http://jupiter.plymouth.edu/~jsduncan/courses/2012_Spring/Techniques/Exams/DensityOfWater-vs-Temp.pdf`

[6] Water - Dynamic and Kinematic Viscosity. *Engineering ToolBox* [online]. [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d_596.html